ホイートストンブリッジ回路

環境建設技術系　松本 英敏

1．ひずみゲージ

抵抗 R は一般的に

$$R = \frac{\rho \cdot \ell}{S} \tag{1}$$

で表される。ここで、ρ ：比抵抗、ℓ ：長さ、S ：断面積である。

この式(1)の両辺を対数で表すと

$$\log R = \log \rho + \log \ell - \log S \tag{2}$$

微分すれば

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta \ell}{\ell} - \frac{\Delta S}{S} \tag{3}$$

となる。ここで、密度変化=体積変化とすれば

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \cong \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta \ell}{\ell} \tag{4}$$

より、式(3)は

$$\frac{\Delta R}{R} = 2\frac{\Delta \ell}{\ell} \tag{5}$$

ひずみの形に書き改めると

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta R}{R} \tag{6}$$

ここに、2 をゲージ率（gauge factor）といい、K を用いる。

2．ひずみゲージとブリッジ回路

次に、ホイートストンブリッジに組み込まれたひずみゲージについて詳述する。

キルヒホッフの電流の連続則から

$$I = I_a + I_b \tag{7}$$

オームの法則より電位は次のように表される。

$$e_i = I_a(R_1 + R_4) \quad , \quad e_i = I_b(R_2 + R_3)$$

点 a,b 回りの電流は (8)

$$I_a = \frac{e_i}{R_1 + R_4} \quad , \quad I_b = \frac{e_i}{R_2 + R_3} \tag{9}$$

となる。そこで、出力電圧は点 a,b の電位差であるから

$$\Delta e = e_a - e_b = I_a R_1 - I_b R_2$$

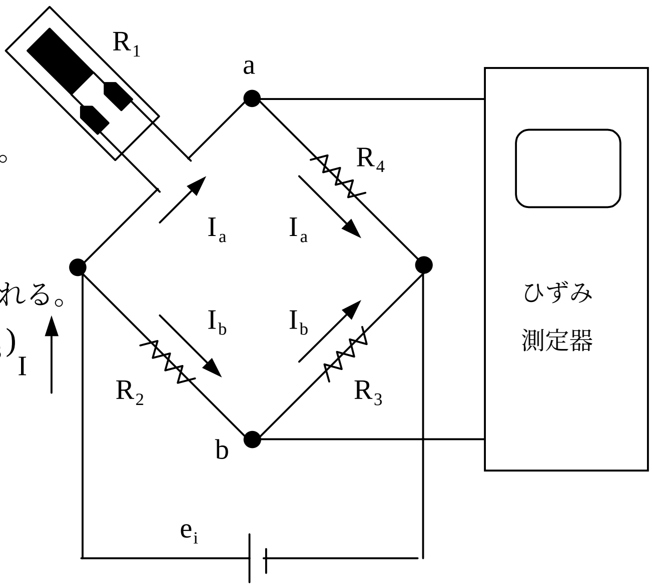

図１ ブリッジ回路の出力

$$= \frac{R_1}{R_1+R_4}e_i - \frac{R_2}{R_2+R_3}e_i$$

$$\Delta e = \frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}e_i \qquad (10)$$

ここで、$R_1R_3 = R_2R_4$ のように抵抗を選ぶと、$\Delta e = 0$ となり**平衡状態**という。

次に、抵抗値が $R_1 \to R_1 + \Delta R$ に変化すると平衡条件がくずれ、出力電圧は

$$\Delta e = \frac{(R_1+\Delta R)R_3 - R_2R_4}{(R_1+\Delta R+R_4)(R_2+R_3)}e_i$$

R_1R_3 で除すと

$$\Delta e = \frac{(1+\Delta R/R_1) - R_2R_4/R_1R_3}{(1+\Delta R/R_1+R_4/R_1)(R_2/R_3+1)}e_i$$

また、ゲージ抵抗が $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ とすると

$$\Delta e = \frac{\Delta R/R_1}{(2+\Delta R/R_1)2}e_i = \frac{\Delta R}{4R_1+2\Delta R}e_i$$

抵抗の変化が微小 $(\Delta R < R_1)$ であれば式(6)を利用して

$$\Delta e = \frac{\Delta R}{4R_1}e_i = \frac{1}{4}K\varepsilon e_i \qquad (11)$$

３．ホイートストンブリッジ回路の基礎式

今回の構成は右図のようになっている。まず、**キルヒホッフの第一法則**から接点 k-1［3］個の独立な方程式が得られる。

$$I_0 - I_1 - I_4 = 0 \qquad (12)$$

$$I_1 + I_g - I_2 = 0 \qquad (13)$$

$$I_4 - I_3 - I_g = 0 \qquad (14)$$

また未知数 6 個だから残りの方程式の数は 3 個必要である。

キルヒホッフ第二法則を適用すると

$$I_4R_4 + I_gr_g - I_1R_1 = 0 \qquad (15)$$

$$I_3R_3 - I_2R_2 - I_gr_g = 0 \qquad (16)$$

$$I_1R_1 + I_2R_2 = e_i \qquad (17)$$

次に、式(13),(14)より

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3 \qquad (18)$$

同様に式(15),(16)より

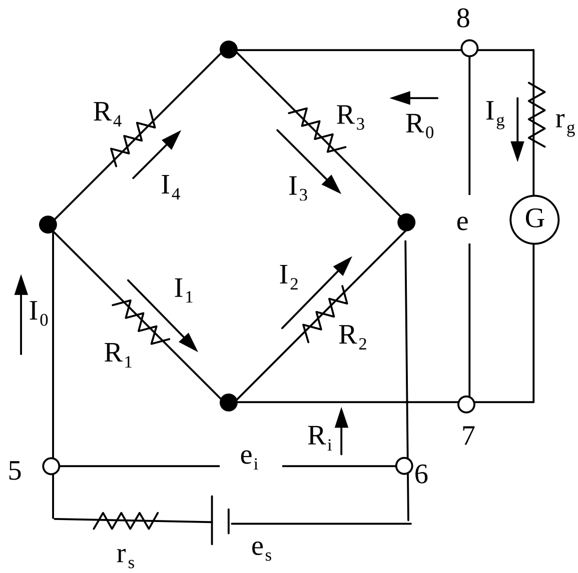

図２ ホイートストンブリッジ回路

$$I_1R_1 + I_2R_2 = I_3R_3 + I_4R_4 \qquad (19)$$

また式(17)の関係から

$$I_1R_1 + I_2R_2 = I_3R_3 + I_4R_4 = e_i \qquad (20)$$

そこで式(20)の第 1 項と第 2 項を式(13),(14)を利用して別々に展開すると

$$I_1R_1 + (I_1 + I_g)R_2 = e_i \qquad I_4R_4 + (I_4 - I_g)R_3 = e_i \qquad (21)$$

$$I_1 = \frac{e_i - I_gR_2}{R_1 + R_2} \qquad I_4 = \frac{e_i + I_gR_3}{R_3 + R_4} \qquad (22)$$

次に、式(22)を式((15)に代入すると

$$\frac{(e_i + I_gR_3)R_4 + I_gr_g(R_3 + R_4)}{R_3 + R_4} = \frac{(e_i - I_gR_2)R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\{(e_i + I_gR_3)R_4 + I_gr_g(R_3 + R_4)\}(R_1 + R_2) = (e_i - I_gR_2)R_1 \cdot (R_3 + R_4)$$

$$I_g = \frac{R_1R_3 - R_2R_4}{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)r_g} e_i \qquad (23)$$

となる。したがって $R_1R_3 = R_2R_4$ すなわち $R_1/R_2 = R_4/R_3$ のときは $I_g = 0$ となりこの状態をブリッジが平衡したという。

次に必要な他の関係を求める。接続点 5,6 から見た場合のブリッジの合成抵抗 R_i は

$$I_0 = \frac{e_i}{R_i} \qquad (24)$$

の関係と式(12)より

$$R_i = \frac{e_i}{I_0} \qquad I_0 = I_1 + I_4 \qquad (25)$$

また、式(22)を用いれば

$$I_0 = \frac{e_i - I_gR_2}{R_1 + R_2} + \frac{e_i + I_gR_3}{R_3 + R_4}$$

$$I_0 = \frac{(e_i - I_gR_2)(R_3 + R_4) + (e_i + I_gR_3)(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

これを式(25)に代入し、式(23)の関係から

$$R_i = \frac{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)r_g}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)r_g} \qquad (26)$$

で示される。また接続点 7,8 からみたブリッジの合成抵抗 R_0 については

キルヒホッフ第一法則から

$$I_g + I_1 - I_2 = 0 \quad , \quad I_g = I_2 - I_1 \qquad (27)$$

$$I_2 + I_3 - I_0 = 0 \tag{28}$$
$$I_0 - I_1 - I_4 = 0 \tag{29}$$
キルヒホッフ第二法則より
$$I_1R_1 + R_2I_2 + r_sI_0 = 0 \tag{30}$$
$$I_0r_s + I_3R_3 + I_4R_4 = 0 \tag{31}$$
$$I_2R_2 - I_3R_3 = e \tag{32}$$
式(28),(29)より
$$I_2 + I_3 = I_1 + I_4 \tag{33}$$
同様に式(30),(31)から
$$I_1R_1 + I_2R_2 = I_3R_3 + I_4R_4 \tag{34}$$
式(32)の関係から
$$I_2R_2 - I_3R_3 = I_4R_4 - I_1R_1 = e \tag{35}$$

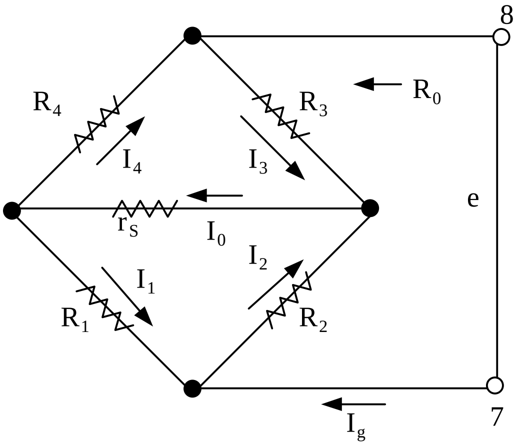

図３　R_0から見たブリッジ回路

式(35)を式(28),(29)を利用して別々に展開すると
$$I_2R_2 - (I_0 - I_2)R_3 = e \qquad (I_0 - I_1)R_4 - I_1R_1 = e \tag{36}$$
$$I_2 = \frac{e + I_0R_3}{R_2 + R_3} \qquad I_1 = \frac{I_0R_4 - e}{R_1 + R_4} \tag{37}$$
次に式(37)を式(30)に代入すると
$$\frac{(I_0R_4 - e)R_1}{R_1 + R_4} + \frac{(e + I_0R_3)R_2}{R_2 + R_3} + I_0r_s = 0 \tag{38}$$
$$I_0\{R_1R_4(R_2 + R_3) + R_2R_3(R_1 + R_4) + (R_1 + R_4)(R_2 + R_3)r_s\} = \{R_1(R_2 + R_3) - R_2(R_1 + R_4)\}e$$
よって (39)
$$I_0 = \frac{R_1R_3 - R_2R_4}{R_1R_4(R_2 + R_3) + R_2R_3(R_1 + R_4) + (R_1 + R_4)(R_2 + R_3)r_s}e \tag{40}$$
そこで剛性抵抗 R_0 は
$$R_0 = \frac{e}{I_g} \tag{41}$$
の関係と式(27)より
$$I_g = I_2 - I_1 = \frac{e + I_0R_3}{R_2 + R_3} - \frac{I_0R_4 - e}{R_1 + R_4}$$
$$I_g = \frac{(e + I_0R_3)(R_1 + R_4) - (I_0R_4 - e)(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}$$
この式に式(40)を代入して、式(41)を解くと
$$R_0 = \frac{R_2R_3(R_1 + R_4) + R_1R_4(R_2 + R_3) + (R_1 + R_4)(R_2 + R_3)r_s}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)r_s} \tag{42}$$

検流計 G の両端の電圧、すなわちブリッジの出力電圧は式(23)の I_g を利用して

$$e = I_gr_g \tag{43}$$

となるが、検流計を取り去ったとき、すなわち$r_g = \infty$のときの出力電圧$(e)_{r_g=\infty}$は

$$e = \frac{R_1R_3 - R_2R_4}{R_1R_2(R_3+R_4)/r_g + R_3R_4(R_1+R_2)/r_g + (R_1+R_2)(R_3+R_4)} e_i$$

$$(e)_{r_g=\infty} = \lim_{r_g\to\infty} e = \frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} e_i \qquad (44)$$

で示される。

ブリッジの４辺に接続したゲージがひずみをうけて、各辺R_1, R_2, R_3, R_4がそれぞれ微小変化$\Delta R_1, \Delta R_2, \Delta R_3, \Delta R_4$を生じたとすると、出力電圧$e$も$\Delta e$変化し

$$\Delta e = \frac{(R_1+\Delta R_1)(R_3+\Delta R_3) - (R_2+\Delta R_2)(R_4+\Delta R_4)}{(R_1+\Delta R_1+R_2+\Delta R_2)(R_3+\Delta R_3+R_4+\Delta R_4)} e_i - \frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} e_i$$

$$\Delta e = \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2}\right)e_i + \frac{R_3R_4}{(R_3+R_4)^2}\left(\frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4}\right)e_i \qquad (45)$$

もし最初にブリッジが平衡（$R_1R_3 = R_2R_4$）していれば、ひずみによる出力電圧は$\Delta e = e$とおけるから

$$\frac{R_3R_4}{(R_3+R_4)^2} = \frac{R_2/R_1}{1+2(R_2/R_1)+(R_2/R_1)^2} = \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}$$

の関係から

$$e_{(R_1R_3=R_2R_4)} = \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4}\right)e_i \qquad (46)$$

式(46)より出力電圧は抵抗変化率、すなわちひずみに比例している。

４．ひずみゲージによるホイートストンブリッジの構成法

1 枚ゲージを使用した場合、図 1 のような接続を行うとひずみεにより抵抗が変化した場合、式(46)の抵抗R_2, R_3, R_4の抵抗変化は 0 である（$\Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4 = 0$）。したがって、式(46)は次のように書き換えられる。

$$\Delta e = \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\cdot\frac{\Delta R_1}{R_1}e_i \qquad (47)$$

ここで、もし初期平衡状態で$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$であり、抵抗$R_1$が$\Delta R$だけ変化した場合、式(47)の出力電圧の変化$\Delta e$は式(6)のゲージ率 K を用いて

$$\Delta e = \frac{1}{4}\cdot\frac{\Delta R}{R}\cdot e_i = \frac{1}{4}K\varepsilon e_i \qquad (48)$$

となる。これは式(11)と同じになる。