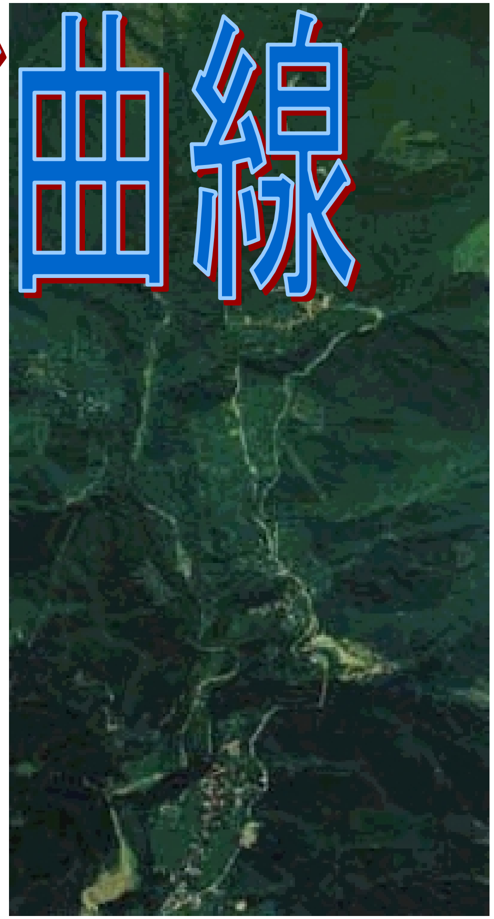
クロソイド曲線

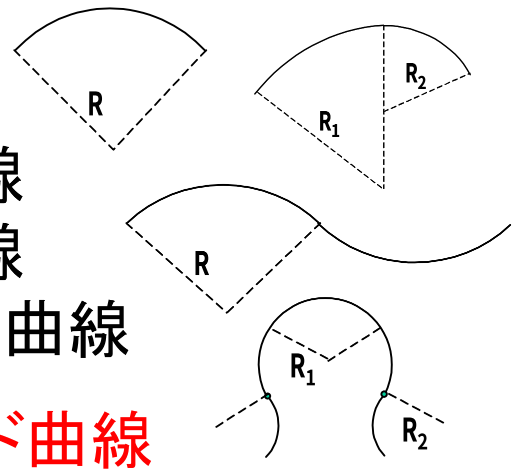
環境建設技術系
松本 英敏

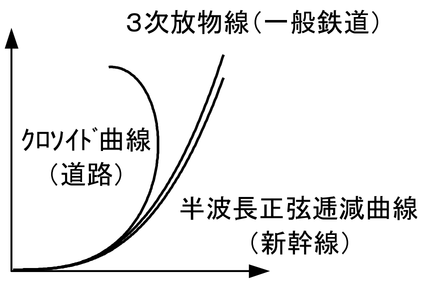


国道17号線三国峠
高崎河川国道事務所

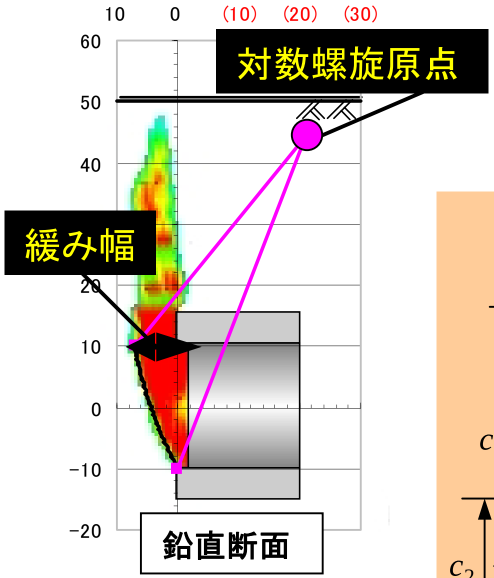
クロソイドの位置付け

- 路線曲線
  - 水平曲線
    - 円曲線
      - 単曲線
      - 複心曲線
      - 反向曲線
      - ヘヤピン曲線
    - 緩和曲線
      - クロソイド曲線
      - 半波長正弦逓減曲線
      - 3次放物線
      - レムニスケート曲線（ｸﾛｿｲﾄﾞ曲線と3次放物線の中間）
  - 縦曲線
    - 2次放物線
    - 円曲線



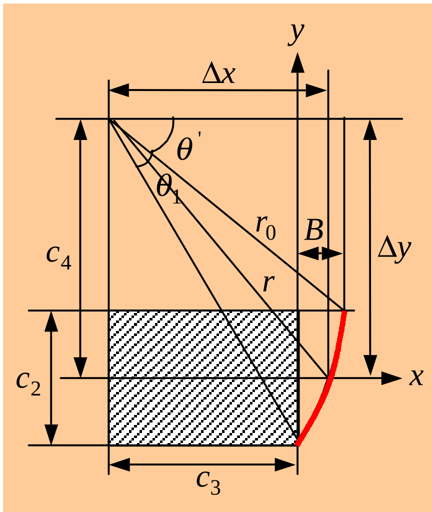


トンネル崩壊（対数螺旋）



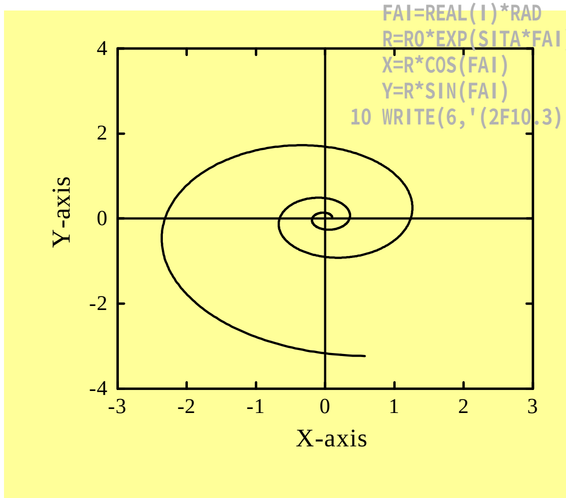
X線CT画像

$$r = r_0 e^{\theta_i \tan\phi}$$



$$r = r_0 e^{\theta\phi}$$

```
      DO 10 I=1,1000
      FAI=REAL(I)*RAD
      R=R0*EXP(SITA*FAI)
      X=R*COS(FAI)
      Y=R*SIN(FAI)
   10 WRITE(6,'(2F10.3)') X,Y
```



r_0＝０．１，Θ＝０．２
Φ＝０～１０００°

$$r_0 = \sqrt{(B + c_3)^2 + (c_4 - c_2')^2}$$

$$\Delta x = r\cos(\theta' + \theta_i) = r\cos\theta'' \quad , \quad \Delta y = r\sin(\theta' + \theta_i) = r\sin\theta''$$

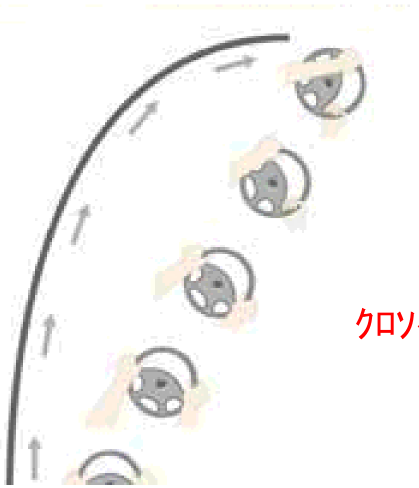
$$x = \Delta x - c_3 = r\cos\theta'' - c_3 \quad , \quad y = c_4 - \Delta y = c_4 - r\sin\theta''$$

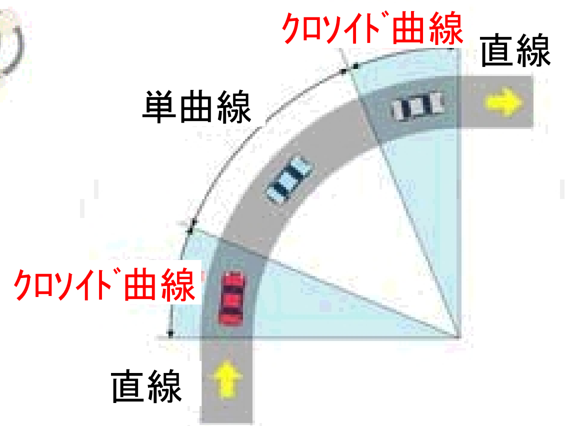
クロソイドの定義

- 曲率(1/R)が曲線長(L)に比例して一様に増大する曲線である。 Cは定数。

$$\frac{1}{R}=C\cdot L \quad , \quad \frac{1}{C}=A^2$$

$$R=\frac{A^2}{L}$$

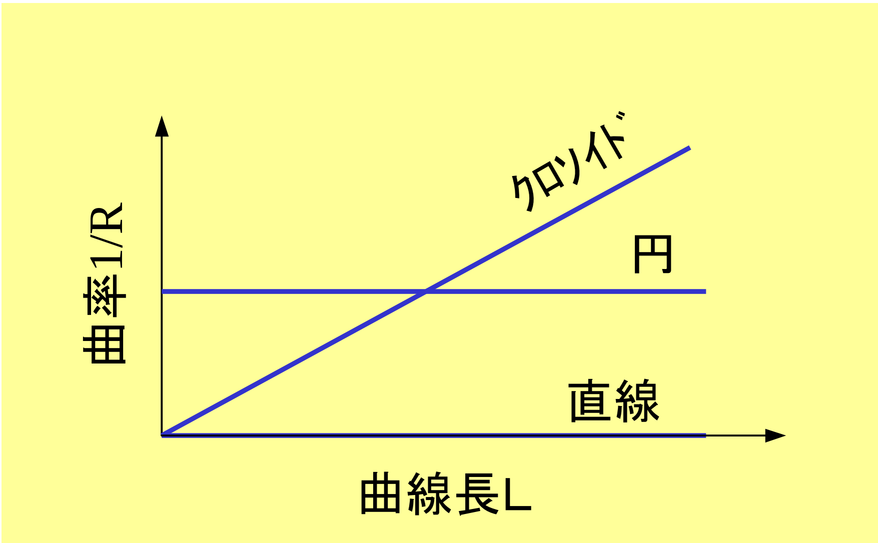




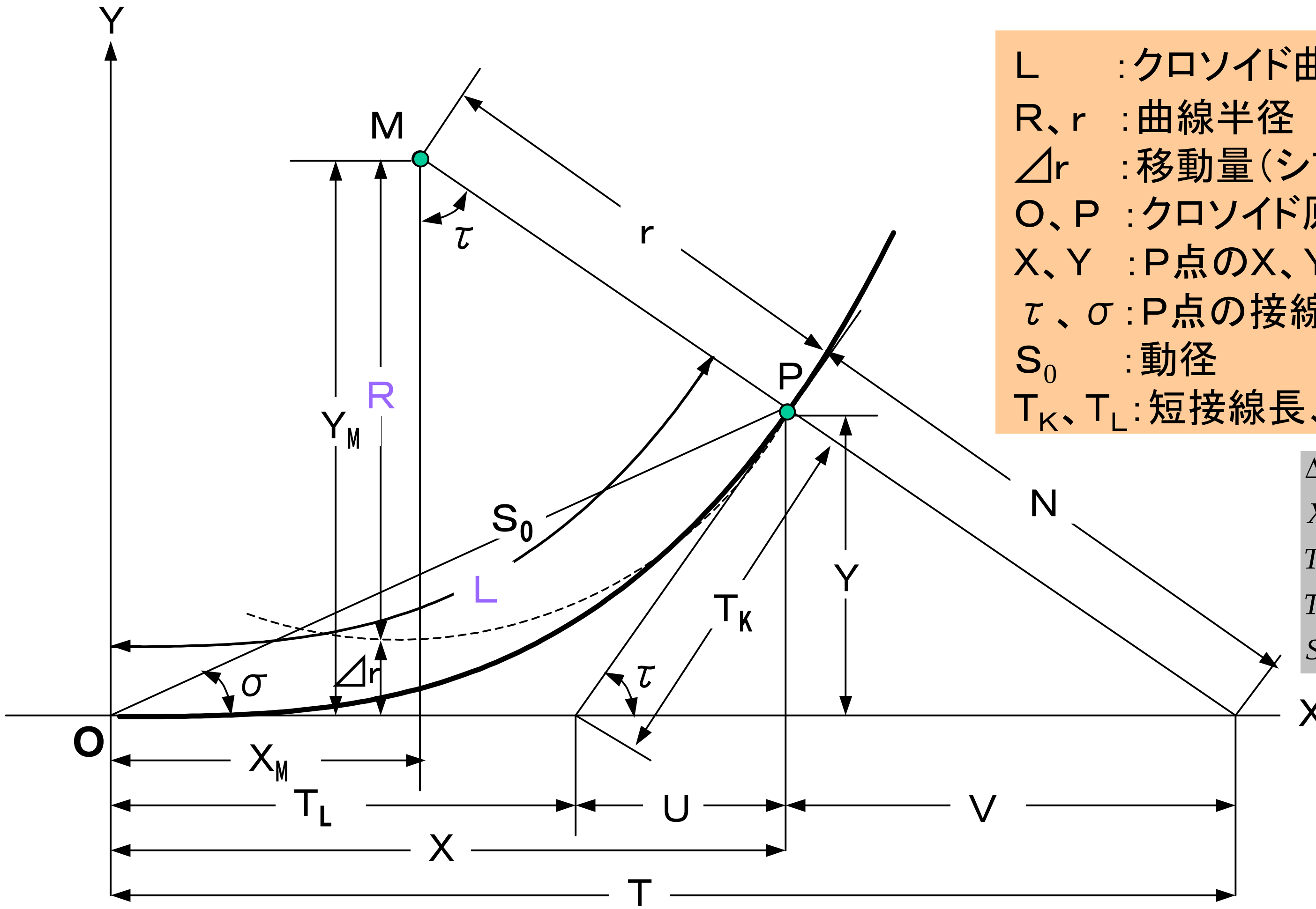
$A=1$ ：単位クロソイド　　$\frac{R}{A}$をr, $\frac{L}{A}$をlとして　$r\cdot l=1$

直線は曲率が0で、円は一定になる

$$\frac{1}{R} = 0 \quad , \quad \frac{1}{R} = 一定$$



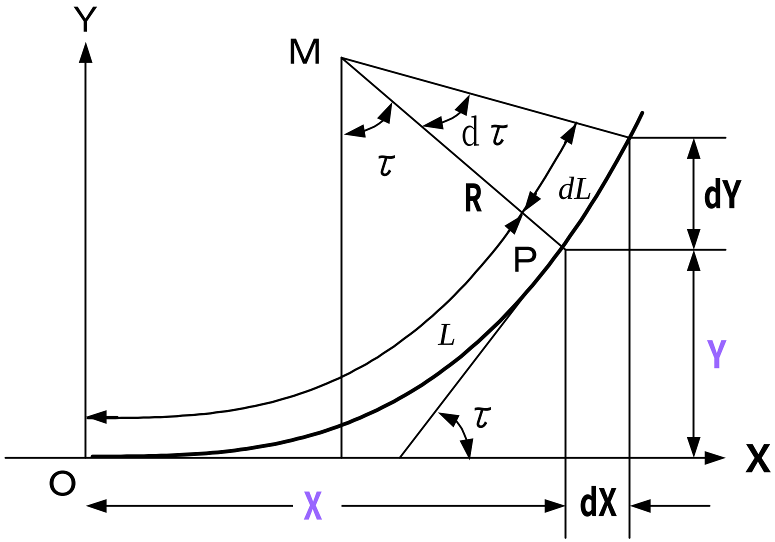
クロソイド要素



L　　:クロソイド曲線長
R、r　:曲線半径
⊿r　:移動量(シフト)
O、P　:クロソイド原点、任意点
X、Y　:P点のX、Y座標
τ、σ :P点の接線角、極角
S_0　:動径
T_K、T_L:短接線長、長接線長

$$\Delta r = Y + R\cos\tau - R$$
$$X_M = X - R\sin\tau$$
$$T_K = Y\,\mathrm{cosec}\,\tau$$
$$T_L = X - Y\cot\tau$$
$$S_0 = Y\,\mathrm{cosec}\,\sigma$$

クロソイドの基本式



$$dL = R \cdot d\tau \qquad (1)$$

$$dX = dL\cos\tau \quad , \quad dY = dL\sin\tau \qquad (2)$$

$RL = A^2$　と式(1)から

$$dL = \frac{A^2}{L} d\tau$$

$$\tau = \int \frac{L}{A^2} dL = \frac{L^2}{2A^2} = \frac{L}{2R}$$

$$R = \frac{A^2}{L} = \frac{A}{\sqrt{2\tau}} \qquad (3)$$

$$\boxed{A = \sqrt{RL} \qquad \tau = \frac{L}{2R}}$$

式(1),(3)を式(2)に代入,フレネル積分型になる

$$X = \frac{A}{\sqrt{2}} \int_0^\tau \frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad , \quad Y = \frac{A}{\sqrt{2}} \int_0^\tau \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}} d\tau$$

$$X = A\sqrt{2\tau}\left(1 - \frac{\tau^2}{10} + \frac{\tau^4}{216} - \frac{\tau^6}{9360} + \cdots\right)$$

$$Y = A\sqrt{2\tau}\left(\frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{42} + \frac{\tau^5}{1320} - \frac{\tau^7}{95600} + \cdots\right)$$

$$X = L\left(1 - \frac{L^2}{40R^2} + \frac{L^4}{3456R^4} - \frac{L^6}{599040R^6} + \cdots\right) \quad , \quad Y = \frac{L^2}{6R}\left(1 - \frac{L^2}{56R^2} + \frac{L^4}{7040R^4} - \frac{L^6}{1612800R^6} + \cdots\right) \qquad (4)$$

クロソイド曲線

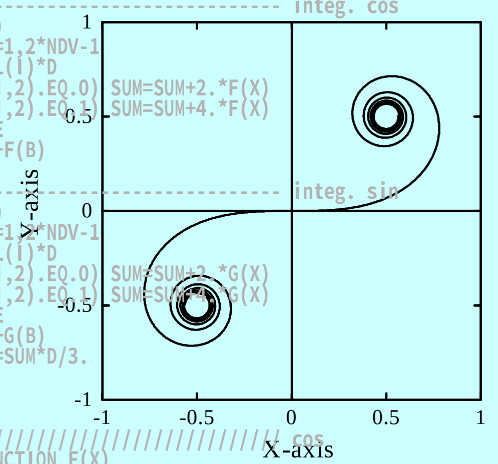
$$X = \int_b^a \cos\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dv \quad , \quad Y = \int_a^b \sin\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dv$$

このようなフレネル積分のvをパラメータとしてクロソイド曲線を描いてみた.

$$X = L\left(1 - \frac{L^2}{40R^2} + \frac{L^4}{3456R^4} - \frac{L^6}{599040R^6} + \cdots\right)$$

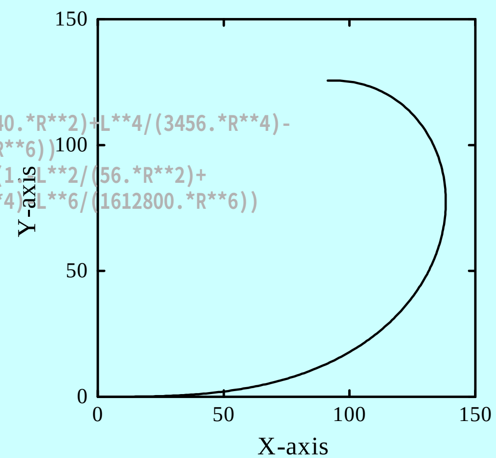
$$Y = \frac{L^2}{6R}\left(1 - \frac{L^2}{56R^2} + \frac{L^4}{7040R^4} - \frac{L^6}{1612800R^6} + \cdots\right) \qquad (4)$$

```
      REAL FUNCTION SIMPSON(A,B,NDV,IND)
C
      D=(B-A)/(2.*REAL(NDV))
      IF(IND.EQ.1) GOTO 20
C     ---------------------------------- integ. cos
      SUM=F(A)
      DO 10 I=1,2*NDV-1
      X=A+REAL(I)*D
      IF(MOD(I,2).EQ.0) SUM=SUM+2.*F(X)
      IF(MOD(I,2).EQ.1) SUM=SUM+4.*F(X)
   10 CONTINUE
      SUM=SUM+F(B)
      GOTO 40
C     ---------------------------------- integ. sin
   20 SUM=G(A)
      DO 30 I=1,2*NDV-1
      X=A+REAL(I)*D
      IF(MOD(I,2).EQ.0) SUM=SUM+2.*G(X)
      IF(MOD(I,2).EQ.1) SUM=SUM+4.*G(X)
   30 CONTINUE
      SUM=SUM+G(B)
   40 SIMPSON=SUM*D/3.
C
      RETURN
      END
C     ////////////////////////////////// cos
      REAL FUNCTION F(X)
      DATA PI/3.1415926/
      F=COS((PI*X*X)/2.)
      RETURN
      END
C     ////////////////////////////////// sin
      REAL FUNCTION G(X)
      DATA PI/3.1415926/
      G=SIN((PI*X*X)/2.)
      RETURN
      END
```



v＝5, a＝0, b＝±5

```
      DATA A/100/
      DO 10 I=1,250
      L=REAL(I)
      R=A*A/L
      X=L*(1.-L**2/(40.*R**2)+L**4/(3456.*R**4)-
     +L**6/(599040.*R**6))
      Y=L**2/(6.*R)*(1.-L**2/(56.*R**2)+
     +L**4/(7040.*R**4)-L**6/(1612800.*R**6))
   10 WRITE(6,*) X,Y
```



A＝100, L＝1～250m

単位クロソイド表の利用

例題1．R=20m,L=5mの2つがあたえられたとして、クロソイドの各要素を求めよ。

l	τ	σ	r	Δr	x_M	x	y	t_K	t_L	t	n	S_0	$\frac{\Delta r}{r}$	$\frac{l}{r}$
0.500,	07 09 43,	02 2313,	2.000,	0.005205,	0.249870,	0.499219,	0.020810,	0.16615,	0.333607,	0.501834,	0.020974,	0.499653,	0.002603,	0.25
0.501, $\cdots$														
0.502, $\cdots$														

$$A^2 = R \cdot L \quad \text{より} \quad A^2 = 20 \times 5 = 100 \quad , \quad A = 10m$$

$$l = \frac{L}{A} = \frac{5}{10} = 0.5 \quad \text{より、単位クロソイド表を引くと}$$

$$x = 0.499219 \quad , \quad y = 0.020810 \quad , \quad x_M = 0.249870$$

おのおのにA倍して

$$X = 4.992 \quad , \quad Y = 0.208 \quad , \quad X_M = 2.499$$

単位クロソイド表から直接　$\tau = 7°9'43''$　が求まる

クロソイド曲線の計算

$$R = 20m \quad , \quad L = 5m$$

$$X = L\left(1 - \frac{L^2}{40R^2} + \frac{L^4}{3456R^4} - \frac{L^6}{599040R^6} + \cdots\right)$$

$$Y = \frac{L^2}{6R}\left(1 - \frac{L^2}{56R^2} + \frac{L^4}{7040R^4} - \frac{L^6}{1612800R^6} + \cdots\right) \qquad (4)$$

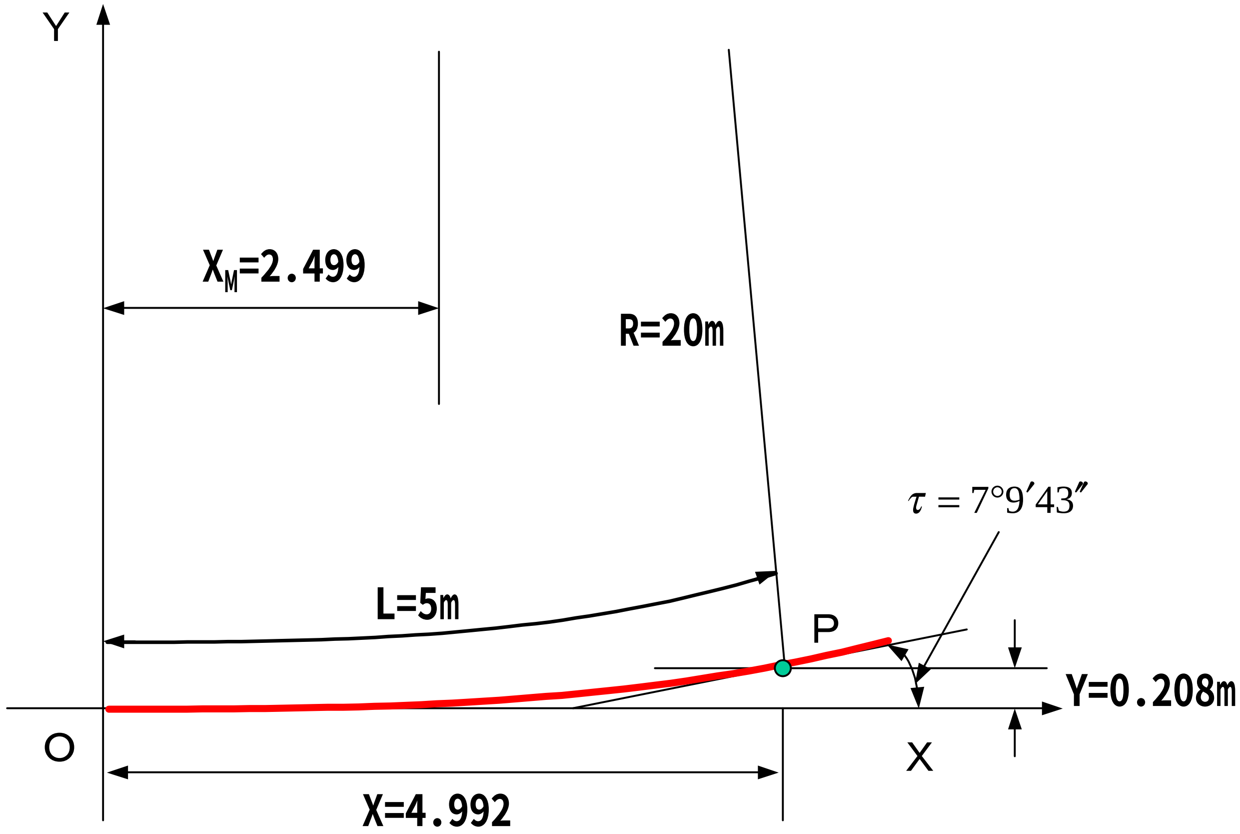
式(4)より、X, Yを求め、τは下式から

$$X_M = X - R\sin\tau = 4.992 - 20\sin(7.162°) = 2.49850$$

$$\boxed{\begin{aligned}\tau &= \frac{L}{2R} = \frac{5}{2\times 20} = 0.125 rad \\ &= 7.162° = 7°9'43''\end{aligned}}$$

```
 DATA R/20./,L/5./
 X=L*(1.-L**2/(40.*R**2)+L**4/(3456.*R**4)-
+L**6/(599040.*R**6))
 Y=L**2/(6.*R)*(1.-L**2/(56.*R**2)+
+L**4/(7040.*R**4)-L**6/(1612800.*R**6))
 TAU=L/(2.*R)
 XM=X-R*SIN(TAU)
 WRITE(6,*) X,Y,XM,TAU
```

クロソイド曲線の作図



クロソイド曲線の課題

A=120mのクロソイドが半径R=150mの円に接続しKAが測点No.3+7mにあるとき20m間隔の測点ごとに中間点を設置せよ。

	L	X	Y	X_M	τ
*No.*4	13.00				
*No.*5					
*No.*6					
*No.*7					
*No.*8					
KE	96.00	95.022	10.165	47.8370	18°20′05″