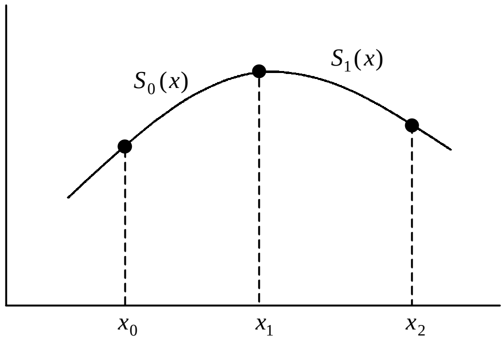
3次スプライン補間法

環境建設技術系　松本 英敏

1．３次スプライン補間

3 次の多項式で小区間を近似する方法に 3 次スプライン補間法がある。　区分的多項式曲線とも呼ばれ、関数 f の 3 次スプライン補間 S は次の条件を満たす。



・ $j=0,1,\cdots,n-2$ において $S(x_j)=f(x_j)$

・ $j=0,1,\cdots,n-2$ において $S_{j+1}(x_{j+1})=S_j(x_{j+1})$

・ $j=0,1,\cdots,n-2$ において $S'_{j+1}(x_{j+1})=S'_j(x_{j+1})$

・ $j=0,1,\cdots,n-2$ において $S''_{j+1}(x_{j+1})=S''_j(x_{j+1})$

が成り立つ。

次の 3 次多項式に当てはめると

$$S_j(x)=a_j+b_j(x-x_j)+c_j(x-x_j)^2+d_j(x-x_j)^3 \quad , \quad (j=0,1,\cdots,n-1) \qquad (1)$$

条件 1：節点では $S(x_j)=f(x_j)$ より、 $x=x_j$ を式(1)に代入すると

$$S_j(x_j)=a_j=f(x_j) \qquad (2)$$

条件 2： $S_{j+1}(x_{j+1})=S_j(x_{j+1})$ の連続性から式(1)は

$$S_{j+1}(x_{j+1})=a_{j+1}=a_j+b_j(x_{j+1}-x_j)+c_j(x_{j+1}-x_j)^2+d_j(x_{j+1}-x_j)^3 \qquad (3)$$

ここで $h_j=x_{j+1}-x_j$ 、 $a_n=f(x_n)$ とおけば

$$a_{j+1}=a_j+b_jh_j+c_jh_j^2+d_jh_j^3 \qquad (4)$$

同様に式(1)を微分して $b_n=S'(x_n)$ とおくと

$$S'_j(x)=b_j+2c_j(x-x_j)+3d_j(x-x_j)^2 \qquad (5)$$

条件 3： $S'_{j+1}(x_{j+1})=S'_j(x_{j+1})$ は 1 階微分の連続性

$$\begin{aligned} S'_j(x_{j+1}) &= b_j+2c_j(x_{j+1}-x_j)+3d_j(x_{j+1}-x_j)^2 \\ &= b_j+2c_jh_j+3d_jh_j^2 \end{aligned}$$

$S'_{j+1}(x_{j+1}) = b_{j+1}$

よって条件 4 より

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \qquad (6)$$

次に、$S''(x_n)/2 = c_n$ とおき

条件 4：$S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ は 2 階微分の連続性から

$$S''_j(x_{j+1}) = 2c_j + 6d_j h_j$$
$$S''_{j+1}(x_{j+1}) = 2c_{j+1}$$

よって

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \qquad (7)$$

式(7)を d_j について解くと

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \qquad (8)$$

この式(8)を式(4),(6)に代入すると

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + \frac{h_j^3}{3h_j}(c_{j+1} - c_j) \\ &= a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \end{aligned} \qquad (9)$$

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3h_j^2 \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \qquad (10)$$

式(9)を移項して、式(10)を代入すると

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \qquad (11)$$

ここで、式(11)を $j \to j-1$ と 1 つ減らすと

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j) \qquad (12)$$

同様に、式(10)も 1 つ減らして式(12)を代入すると

$$b_j = b_{j-1} + h_{j-1}(c_{j-1} + c_j) = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j) + h_{j-1}(c_{j-1} + c_j) \tag{13}$$

式(11),(13)より

$$\frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j) + h_{j-1}(c_{j-1} + c_j)$$

$$\frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) = \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j) + h_{j-1}(c_{j-1} + c_j)$$

$$\frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) = h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_j + h_{j-1})c_j + h_j c_{j+1} \tag{14}$$

境界条件より、$c_0 = 0$ ， $c_n = 0$ を用いて式(14)の右辺と左辺を移項して matrix 表示すると

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_1 + h_0) & h_1 & & & & & & & 0 \\ \vdots & h_1 & 2(h_2 - h_1) & h_2 & & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

ベクトルおよび定数項は

$$x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

よって、$A \cdot x = b$ の形で表わすことができる。$h_j = x_{j+1} - x_j$ ， $a_j = f(x_j)$ より、連立方程式

を解けばc_jが求まる。　次に、式(11)よりb_jを式(8)よりd_jを求めて、式(1)の 3 次多項式に代入すれば、3 次スプライン補間式が完成する。

【例】次のデータにマッチする 3 次スプラインを求めよ。

x	$f(x)$
0.9	1.3
1.3	1.5
1.9	1.85
2.1	2.1
2.6	2.6
3.0	2.7
3.9	2.4
4.4	2.15
4.7	2.05
5.0	2.1
6.0	2.25
7.0	2.3
8.0	2.25
9.2	1.95

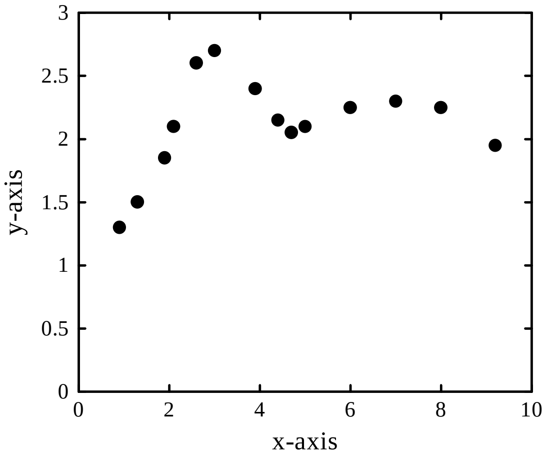


図 1　初期データ

a_j	b_j	c_j	d_j
1.300	0.540	0.000	-0.248
1.500	0.421	-0.297	0.947
1.850	1.087	1.407	-2.956
2.100	1.295	-0.367	-0.447
2.600	0.593	-1.037	0.445
2.700	-0.022	-0.502	0.174
2.400	-0.503	-0.032	0.078
2.150	-0.477	0.085	1.314
2.050	-0.071	1.268	-1.581
2.100	0.262	-0.155	0.043
2.250	0.080	-0.027	-0.003
2.300	0.017	-0.036	-0.031
2.250	-0.147	-0.128	0.036

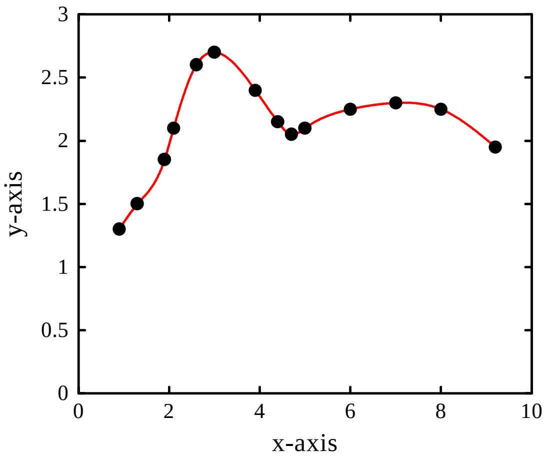


図 2　3 次スプラインデータ

【参考プログラム】

参考に Fortran program を下枠に示す。　必要に応じて皆さんの使用言語に変換して下さい。なお、配列、OPEN 文、直接に連続方程式を解くサブルーチン・プログラムは省略してます。

また、式(15)の逆マトリックスから求める方法でも全く同じ解になります。

```
      DATA ND/100/
C     ---------------------------------- input data
      K=1
    1 READ(1,*,END=2) X(K),Y(K)
      K=K+1
      GOTO 1
    2 CLOSE(1)
      N=K-1
      NP1=N-1
C     ---------------------------------- initialize aj
      DO 10 I=1,N
      A(I)=Y(I)
      B(I)=0.
      C(I)=0.
      D(I)=0.
      DO 10 J=1,N
   10 H(I,J)=0.
      H(1,1)=1.
      H(N,N)=1.
C     ---------------------------------- calc. matrix
      DO 20 I=2,NP1
      H0=X(I)-X(I-1)
      H1=X(I+1)-X(I)
      H(I,I-1)=H0
      H(I,I  )=2.*(H0+H1)
      H(I,I+1)=H1
   20 C(I)=3.*(A(I+1)-A(I))/H1-3.*(A(I)-A(I-1))/H0
C     ---------------------------------- gauss jordan
      CALL GAUSS(H,C,N)
C     ---------------------------------- calc. dj,bj
      DO 50 I=1,NP1
      HJ=X(I+1)-X(I)
      D(I)=(C(I+1)-C(I))/(3.*HJ)
   50 B(I)=(A(I+1)-A(I))/HJ-(2.*C(I)+C(I+1))*HJ/3.
C     ---------------------------------- output data
      WRITE(2,*) '***** calc. coeffi. *****'
      WRITE(2,'(4F10.3)') (A(I),B(I),C(I),D(I),I=1,NP1)
      CLOSE(2)
C     ---------------------------------- simulation data
      DO 60 I=1,NP1
      DX=(X(I+1)-X(I))/REAL(ND)
      IF(I.EQ.NP1) ND=ND+1
      DO 60 J=1,ND
      XX=REAL(J-1)*DX
      SJ=A(I)+B(I)*XX+C(I)*XX**2+D(I)*XX**3
   60 WRITE(3,'(2F10.5)') X(I)+XX,SJ
      CLOSE(3)
C
      STOP
      END
```

【参考文献】

3 次スプライン補間法

http://next1.cc.it-hiroshima.ac.jp/MULTIMEDIA/numeanal1/node16.html